PART4　逆・裏・対偶，命題の証明

例題

(1)　x，y は実数とする。次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

$$x+y \neq 4 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 \text{ または } y \neq 3$$

(2)　n を整数とする。n^2 が偶数ならば，n は偶数であることを証明せよ。

(3)　$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{2}-1$ が無理数であることを証明せよ。

Point Pickup

練習

(1)　x，y は実数とする。次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

xy が無理数　⇒　x，y の少なくとも一方は無理数

(2)　n を整数とする。n^2 が 7 の倍数でないならば，n は 7 の倍数でないことを証明せよ。

(3)　$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

第 4 講　PART4　確認問題

1　次の ア に当てはまる命題とその真偽を①～④から選べ。

ただし，x は実数とする。

命題「$x^2 \geqq 9 \Longrightarrow x \geqq 3$」の逆は， ア

①「$x^2 < 9 \Longrightarrow x < 3$」　これは真

②「$x \geqq 3 \Longrightarrow x^2 \geqq 9$」　これは真

③「$x^2 < 9 \Longrightarrow x < 3$」　これは偽

④「$x \geqq 3 \Longrightarrow x^2 \geqq 9$」　これは偽

2　次の イ に当てはまる命題とその真偽を①～④から選べ。

ただし，x，y は実数とする。

命題「$x+y=4 \Longrightarrow x \leqq 2$　または　$y \leqq 2$」の裏は，

イ

①「$x+y \neq 4 \Longrightarrow x > 2$　かつ　$y > 2$」
これは真

②「$x \leqq 2$　または　$y \leqq 2 \Longrightarrow x+y=4$」
これは真

③「$x+y \neq 4 \Longrightarrow x > 2$　かつ　$y > 2$」
これは偽

④「$x \leqq 2$　または　$y \leqq 2 \Longrightarrow x+y=4$」
これは偽

3 次の [ウ] に当てはまる命題とその真偽を①～④から選べ。

ただし，n は自然数とする。

命題「n は6の倍数でない $\Longrightarrow$ n は3の倍数でない」

の対偶は，[ウ]

①「n は3の倍数 $\Longrightarrow$ n は6の倍数」

これは真

②「n は6の倍数 $\Longrightarrow$ n は3の倍数」

これは真

③「n は3の倍数 $\Longrightarrow$ n は6の倍数」

これは偽

④「n は6の倍数 $\Longrightarrow$ n は3の倍数」

これは偽

4 n を自然数とする。n^2 が3の倍数でないならば，n は3の倍数でないことを証明せよ。

【証明】

この命題の [エ] は「n が3の倍数ならば，n^2 は3の倍数である」。これを示す。

n が3の倍数のとき，n は整数 k を用いて

$n=$ [オ] k

と表される。このとき，

$n^2=($ [オ] $k)^2=$ [カ] $k^2=$ [キ] $\cdot 3k^2$

$3k^2$ は整数であるから，n^2 は [キ] の倍数である。

よって，[エ] が [ク] より，もとの命題も [ク] である。

[エ]，[ク] は次の①～⑤のうちから選べ。

①　逆　　②　裏　　③　対偶

④　真　　⑤　偽

5 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ が無理数であることを証明せよ。

【証明】

$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ は $\boxed{\text{ケ}}$ であるから，

$$\sqrt{3}+\sqrt{6}=r \quad (r\text{ は有理数})$$

とおくと

$$(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2=r^2$$

$$9+6\sqrt{2}=r^2 \qquad \sqrt{\boxed{\text{コ}}}=\frac{r^2-9}{6}$$

r は有理数より，$\dfrac{r^2-9}{6}$ も有理数である。

よって，$\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ は次の①，②のうちから選べ。

①　有理数　　　②　無理数

PART4　逆・裏・対偶，命題の証明

例題

(1)　x，y は実数とする。次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

$$x+y \neq 4 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 \text{ または } y \neq 3$$

(2)　n を整数とする。n^2 が偶数ならば，n は偶数であることを証明せよ。

(3)　$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{2}-1$ が無理数であることを証明せよ。

(1)　逆：$x \neq 1$ または $y \neq 3 \quad \Rightarrow \quad x+y \neq 4$

偽（反例：$x=2$ かつ $y=2$）

裏：$x+y=4 \quad \Rightarrow \quad x=1$ かつ $y=3$

偽（反例：$x=2$ かつ $y=2$）

対偶：$x=1$ かつ $y=3 \quad \Rightarrow \quad x+y=4$

これは明らかに真

(2)　この命題の対偶は「n が奇数ならば，n^2 は奇数である」。これを示す。

n が奇数のとき，n は整数 k を用いて

$$n=2k+1$$

と表される。このとき

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$

$2k^2+2k$ は整数であるから，n^2 は奇数である。

よって，対偶が真より，もとの命題も真である。

(3)　$\sqrt{2}-1$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{2}-1$ は有理数であるから，

$$\sqrt{2}-1=r \ (r \text{ は有理数})$$

とおくと

$$\sqrt{2}=r+1$$

r は有理数より，$r+1$ も有理数である。

よって，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$\sqrt{2}-1$ は無理数である。

練習

(1)　x，y は実数とする。次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

xy が無理数　$\Rightarrow$　x，y の少なくとも一方は無理数

(2)　n を整数とする。n^2 が 7 の倍数でないならば，n は 7 の倍数でないことを証明せよ。

(3)　$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

(1)　逆：x，y の少なくとも一方は無理数　$\Rightarrow$　xy が無理数

偽（反例：$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$）

裏：xy が有理数　$\Rightarrow$　x，y はともに有理数

偽（反例：$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$）

対偶：x，y はともに有理数　$\Rightarrow$　xy が有理数

これは明らかに真

(2)　この命題の対偶は「n が 7 の倍数ならば，n^2 は 7 の倍数である」。これを示す。

n が 7 の倍数のとき，n は整数 k を用いて

$$n=7k$$

と表される。このとき

$$n^2=(7k)^2=49k^2=7\cdot 7k^2$$

$7k^2$ は整数であるから，n^2 は 7 の倍数である。

よって，対偶が真より，もとの命題も真である。

(3)　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は有理数であるから，

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=r \ (r \text{ は有理数})$$

とおくと

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=r^2$$

$$5+2\sqrt{6}=r^2 \qquad \sqrt{6}=\frac{r^2-5}{2}$$

r は有理数より，$\dfrac{r^2-5}{2}$ も有理数である。

よって，$\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である。

第 4 講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

「$x^2 \geqq 9 \Longrightarrow x \geqq 3$」

この逆は「$\boldsymbol{x \geqq 3 \Longrightarrow x^2 \geqq 9}$」 [A]

これは真

[A]　逆
命題 $p \Longrightarrow q$ に対して，
$q \Longrightarrow p$ を逆という。
命題とその逆の真偽は一致するとは限らない。

2

[正解] イ：③

[解説]

「$x+y=4 \Longrightarrow x \leqq 2$　または　$y \leqq 2$」

この裏は「$\boldsymbol{x+y \neq 4 \Longrightarrow x>2}$ **かつ** $\boldsymbol{y>2}$」 [B]

これは偽（反例　$x=3,\ y=-1$）

[B]　裏
命題 $p \Longrightarrow q$ に対して，
$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$ を裏という。
ある命題の逆と裏の真偽は一致する。

3

[正解] ウ：③

[解説]

「n は 6 の倍数でない $\Longrightarrow$ n は 3 の倍数でない」

この対偶は「$\boldsymbol{n}$ **は 3 の倍数** $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{n}$ **は 6 の倍数**」 [C]

これは偽（反例　$n=9$）

[C]　対偶
命題 $p \Longrightarrow q$ に対して，
$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ を対偶という。
命題とその対偶の真偽は一致する。

4 [正解] エ：③，オ：3，カ：9，キ：3，ク：④

[証明]

この命題の**対偶**は「n が 3 の倍数ならば，n^2 は 3 の倍数である」。これを示す。 [D]

n が 3 の倍数のとき，n は整数 k を用いて

$$n=3k$$

と表される。このとき，

$$n^2=(3k)^2=9k^2=3\cdot 3k^2$$

$3k^2$ は整数であるから，n^2 は 3 の倍数である。

よって，対偶が**真**より，もとの命題も真である。

> [D]　命題 $p \Longrightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する。
> 対偶が真であることを示すことで，もとの命題が真であることを証明することができる。

5 [正解] ケ：①，コ：2，サ：2，シ：②

[証明]

$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ は**有理数**であるから， [E]

$$\sqrt{3}+\sqrt{6}=r \quad (r\text{ は有理数})$$

とおくと

$$(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2=r^2$$

$$9+6\sqrt{2}=r^2 \qquad \sqrt{2}=\frac{r^2-9}{6}$$

r は有理数より，$\dfrac{r^2-9}{6}$ も有理数である。

よって，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ は**無理数**である。

> [E]　背理法
> ある命題を証明するとき，その命題が成り立たないと仮定すると矛盾が生じることを示し，それによってもとの命題が成り立つことを証明する方法を背理法という。